استقراريه حل معادلة فريدهولم – فولتيرا التكاملية شاذة وغير شاذة

مبروكة الشارف غيث[1]، عواطف هدية منصور[2]
[1]جامعة الجفارة، كلية العلوم والموارد الطبيعية، قسم الرياضيات، المعمورة، ليبيا
[2]جامعة الجفارة كلية العلوم والموارد الطبيعية، قسم الرياضيات، المعمورة، ليبيا
Awatifabuguffah@gmail.com[2] mabroukaghaith81@gmail.com,[1]

الملخص: يهدف البحث الى التعرف الى استقرارية حل معادلة فريدهولم – فولتيرا التكاملية شاذة وغير شاذة، وقد تناول البحث معادلة فريدهولم– فولتيرا التكاملية مع نواة المتصلة فيما يتعلق بالموقع والزمن، تم حلها عددياً باستخدام التجميع وجالركين، كما تم تقدير الخطأ في كل حالة، واستقراريه حلها.

الكلمات المفتاحية: معادلة فريدهولم – فولتيرا التكاملية، طريقة التجميع، طريقة جالركين، استقرار الحل.

The Stability of Solutions to Singular and Non-Singular Fredholm-Volterra Integral Equations

Mabrouka A. Ghaith [a], Awatef H. M. Abu-Qoffah[b]
[a]AlJafara University, College of Science and Natural Resources, Department of Mathematics, AlJafara, Libya
[b]AlJafara University College of Science and Natural Resources - Department of Mathematics, AlJafara, Libya

Abstract The aim of the research is to identify solution stability of Friedholm-Volterra equation. This research studied the Friedholm-Volterra integral equation with a continuous kernel with respect to position and time. It was solved numerically using grouping and Galerkin. The error in each case and the stability of its solution were estimated.
Keywords: Friedholm-Volterra integral equation ،grouping method ،Galerkin method ،stability of the solution.

1. مقدمة

تؤدي المعادلات التكاملية ذات الأنوية المختلفة دوراً بارزاً في حل الكثير من مسائل الرياضيات سواء كان الحل تحليلي أو عددي، وحيث أن التطور السريع في هندسة الكمبيوتر اهتم بالطرق العددية للمسائل التطبيقية، حيث تحتل الطرق العددية مكانة مهمة في حل المعادلات التكاملية الخطية أو غير الخطية سواء عندما تكون النواة شاذة أو غير شاذة، إذ يمكن حل الكثير من المشاكل الموجودة في الصناعة مثل السيراميك ومحاولة زيادة مقاومته على شكل معادلة تكاملية غالباً ما تكون شاذة وغير خطية.

تعتبر معادلة فريدهولم - فولتيرا التكاملية من العناصر الأساسية في حساب التفاضل والتكامل، وتشغل مكانة مهمة في الرياضيات والفيزياء. تهدف هذه الدراسة إلى تقديم تحليل معمق لهذه المعادلة وفهم أهميتها وتطبيقاتها المختلفة في المجالات المختلفة. يعتبر فهم هذه المعادلة أساسيًا لأي بحث في التكامل والتفاضل، ولهذا تعد هذه المقدمة هامة لوضع الأسس لباقي أقسام الدراسة.

العديد من مشاكل الفيزياء الرياضية والهندسة ومشاكل الاتصال في نظرية المرونة تؤدي ألي معادلات متكاملة. يحتويان على العديد من الطرق المختلفة لحل المعادلات التكاملية تحليلياً. في نفس الوقت، تأخذ الطرق العددية مكاناً مهماً في حل المعادلات التكاملية عددياً، ويعتبر المصطلح

المتكامل في الموضع ومصطلح فولتيرا المتكامل في الوقت المناسب ونظرا لانه لم يتم حل المعادلة المتكاملة عندما تكون نواة الموضع متصلة، لذلك في هذا البحث نأخذ معادلة فريدهولم-فولتيرا التكاملية من النوع الثاني مع نواة متصلة فيما يتعلق بالموقع والزمن [1].

سيتم إثبات وجود الحل ووحدانية في ظل ظروف معينة في الفضاء $L_2[a,b] \times C[0,T], 0 \le t \le T \le \infty$.

يتم استخدام طريقة عددية لتمثيل معادلة فريدهولم-فولتيرا التكاملية في شكل نظام خطي من معادلات فريدهولم التكاملية حيث تتم مناقشة وجود النظام ووحدانية، كما استخدمنا طرق التجميع و جالركين للحصول على نظام خطي من المعادلات الجبرية، والتي يتم حلها أيضاً عددياً وعلى ذلك يتم حساب تقدير الخطأ في كل حالة، استقرار حلها [1] [2].

2. وجود ووحدانية الحل

نأخذ المعادلة فريدهولم-فولتير التكاملية

$$\mu\emptyset(x,t) - \lambda\int_a^b k(x,y)\emptyset(y,t)dy - \lambda\int_0^t F(t,\tau)\emptyset(x,\tau)d\tau = f(x,t) \quad (\mathbf{2.1})$$

حيث $k(x,y)$ و $F(t,\tau)$ هي دوال متصلة تمثل نواة فريدهولم وشروط فولتيرا المتكاملة علي التوالي، الدالة المعروفة $F(t,\tau)$ تسمي الحد الحر للمعادلة المتكاملة، بينما $\emptyset(x,\tau)$ تسمي غير معروفة الدالة المحتملة، وهنا يعتبر فريدهولم في موقعه، بينما فولتيرا في الوقت المناسب، يحدد الثابت μ نوع المعادلة التكاملية بينما الثابت λ قد يكون معقداً وله معني فيزيائي من أجل ضمان ووجود حل فريد من نوعه (2.1) نفترض ما يلي:

1. النواة موقع مستوفي $|k(x,y)| \le N_1$ الكل $a \le x,y \le b$ حيث N_1 ثابت.
2. الدالة الإيجابية المستمرة $F(t,\tau) \in C([0,T]\times[0,T])$ الكل $0 \le t,\tau$ ومستوفي $|F(t,\tau)| \le N_2$ حيث $T \prec \infty$ N_2 ثابت.
3. يتم أعطاء الدالة المعينة وقاعدتها على النحو التالي:

$$\|f(x,t)\| = \max_{0\le\tau\le T}\int_0^\tau\int_a^b \{f^2(x,\tau)\}^{\frac{1}{2}}dxd\tau = N_3$$

حيث N_3 ثابت.

4. الدالة غير معروفة $\phi(x,\tau)$ لأعطاء شرط لبيتز فيما يتعلق بالموضع العلوي $|\emptyset(x_1,t) - \emptyset(x_2,t)| \le A(t)|x_1 - x_2|$ وفيما يتعلق بالوقت $|\emptyset(x,t_1) - \emptyset(x,t_2)| \le B(x)|t_1 - t_2|^{\propto}, 0 \le \propto \le 1,$ وتعرف القاعدة علي أنها

$$\|\emptyset(x,t)\| = \max_{0\le\tau\le T}\int_0^\tau\int_a^b \{\emptyset^2(x,\tau)\}^{\frac{1}{2}}dxd\tau = N_4$$

[3].

3. نظام معادلات فريدهولم التكاملية

لتمثيل (2.1) كنظام من معادلات فريدهولم التكاملية، نستخدم الطريقة العددية التالية، يقسم الفاصلة $[0,T]$ مثل

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < t_N = T, \quad i.e.\, t = t_k, \quad k = 0,1,2,\dots,N$$

باستخدام صيغة التربيع، يصبح مصطلح فولتيرا في (2.1)

$$\int_0^{\tau_k}\phi(x,\tau)F(t_k,\tau)d\tau = \sum_{j=0}^{k} u_j F(t_k,t_j)\phi(x,t_j) + O\left(h_i^{\tilde{p}+1}\right), \quad (h_k \longrightarrow 0, \tilde{p} > 0) \quad (\mathbf{3.1})$$

بحيث

$$h_k = \max_{0\le j\le k} h_j, h_j = t_{j+1} - t_j$$

تعتمد قيم k والثابت $\tilde{p}$ علي عدد مشتقات $F(t,\tau)$ للجميع w.r.t., $\tau \in [0,T]$ و

$$u_0 = \frac{1}{2}h_0, u_k = \frac{1}{2}h_k, u_i = h_i, (i \ne 0,k).$$

باستخدام (3.1) (2.1) بعد ترك $t = t_k, k =$ نحن عندنا $1,2,\dots,N,$

$$\mu\phi(x,t_k) = f(x,t_k) + \lambda\int_a^b k(x,y)\phi(y,t_k)dy + \lambda\sum_{j=0}^{k} u_j F(t_i,t_j)\phi(x,t_k) \quad (\mathbf{3.2})$$

أو

$$\mu\phi_k(x) = f_k(x) + \lambda\int_a^b k(x,y)\phi_k(y)dy + \lambda\sum_{j=0}^{k} u_j F_{k,j}\phi_j(x)\phi_k(x) =$$

$\phi(x,t_k), f_k(x)=f(x,t_k), F_{k,j}=F(t_k,t_j),$ **(3.3)**

تصبح الصيغة (3.3)

$$\mu_n\phi_n(x)=G_n(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\phi_n(y)dy \quad \textbf{(3.4)}$$

بحيث

$$\mu_n=\mu-\lambda u_n F_{n,n};\lambda_n=\lambda u_n F_{n,n},$$

$$G_n(x)=f_n(x)+\lambda\sum_{j=0}^{n-1}u_j F_{n,j}\phi_j(x),$$

$$n=0,1,2,\dots,N$$

تمثل الصيغة (3.4) نظاماً خطياً من معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني، حيث $\lambda u_n F_{n,n}\neq\mu$.

الآن سوف نقوم بحل النظام الخطي (3.4) باستخدام طريقة التجميع وطريقة جالركين [4] [5].

1.3. طريقة التجميع

تعتمد طريقة التجميع علي تقريب الحل $\emptyset(x,t)$ مجموع جزئي.

$$S(x,t_i)=\sum_{k=1}^{N}c_k(t_i)\psi_k(x) \quad \textbf{(3.5)}$$

من N وضائف مستقلة خطياً $\psi_1(x),\psi_2(x),\dots,\psi_N(x)$ الفاصل الزمني (a,b).لذلك لدينا

$$\mu S_i(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)S_i(y)dy\approx f(x,t_i)+\lambda\sum_{j=0}^{i=1}w_j F_{i,j}S_j(x)+\varepsilon\left(x,c_1(t),c_2(t),\dots,c_N(t)+R\left(h_1^{p+1}\right)\right) \quad \textbf{(3.6)}$$

بالطبع اذا كان الحل تقريبي (3.5) هو التعويض بـ (3.4) لـ $\emptyset(x,t)$، فسيكون خطأ[6].

$\varepsilon\left(x,c_1(t),c_2(t),\dots,c_N(t)\right)$ يعتمد هذا الخطأ x,t والطريقة التي يتم بها اختيار المعاملات $c_1(t),c_2(t),\dots,c_N(t)$ يتزك لها في الصيغة (3.6) ثم باستخدام صيغة التربيع $t=t_i\ ,i=0,1,2,\dots,N$ لدينا:

$$\mu_i S_i(x_m)-\lambda\int_a^b k(x_m,y)S_i(y)dy\approx f(x_m,t_i)+\lambda\sum_{j=1}^{i-1}w_j F_{i,j}S_j(x_m),i,m=0,1,2,\dots,N \quad \textbf{(3.7)}$$

لتحديد المعاملات $c_1(t_i),c_2(t_i),\dots,c_N(t_i)$ للحل التقريبي $S_N(x_N)$ من (3.5)، بدلالة الدوال المستقلة خطياً N المحددة$\psi_1(x),\psi_2(x),\dots,\psi_N(x)$، نقوم بأجراء التكامل ثم استبدل $x=x_1,x_2,\dots,x_N$ حيث يختفي الخطأ $\varepsilon\left(x,c_1(t),c_2(t),\dots,c_N(t)\right)$ بالتعويض من (3.5) في (3.6) نحصل علي:

$$\mu_i\sum_{k=1}^{N}c_k\ (t_i)\psi_k(x_m)-\lambda\sum_{k=1}^{N}c_k(t_i)\int_a^b k(x_m,y)\psi_k(y)dy=f_{mi}+\lambda\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=1}^{N}w_j F_{i,j}c_k(t_j)\psi_k(x_m) \quad \textbf{(3.8)}$$

[7]

2.3 طريقة جالركين

تحدد هذه الطريقة الشروط N اللازمة ل تحديد معاملات N في المعادلة (3.5):

عن طريق ارتكاب الخطأ $\varepsilon\left(x,c_1(t),c_2(t),\dots,c_N(t)\right)$ في (3.6) متعامد مع N مع أعطاء دوال مستقلة خطياً $\psi_1(x),\psi_2(x),\dots,\psi_N(x)$ في الفترة (a,b) أي

$$\int_a^b\psi_j(x)\varepsilon\left(x,c_1(t),c_2(t),\dots,c_N(t)\right)dx=0 \quad \textbf{(3.9)}$$

ثم من (3.6) لدينا

$$\int_a^b\psi_j\ (x)\left[\mu_i S_i(x_m)-f(x_m,y)-\lambda\int_a^b k(x_m,y)S_i(y)dy-\lambda\sum_{j=1}^{i-1}w_j F_{i,j}S_j(x)-R\left(h_i^{p+1}\right)\right]dx=0 \quad \textbf{(3.10)}$$

مكافئ (3.10) يمكن كتابتها بالصيغة:

$$\int_a^b\psi_j\ (x)\left[\mu_i S_i(x_m)-\lambda\int_a^b[k(x_m,y)S_i(y)dy-\lambda\sum_{j=1}^{i-1}w_j F_{i,j}S_j(x_m)-R\left(h_i^{p+1}\right)\right]dx=\int_a^b\psi_j(x)f(x_m,t_i)\,dx\ \ (i,m=0,1,\dots,N) \quad \textbf{(3.11)}$$

حيث $R\left(h_i^{p+1}\right)$ هو الخطأ في تقسيم الخطأ و $\hbar_i=\max_{0\le j\le i}h_j, h_j=t_{j+1}-t_j$. قيم i والثابت p تعتمد علي مشتقات $F(t,\tau)$ لجميع $\tau\in[0,T]$ ، مع أعادة فضاء إلي t. فيما يتعلق بالاستبدال من (3.5) إلى (3.11) نحصل علي:

$$\int_a^b\psi_j(x)\left[\mu_I\sum_{k=1}^{N}c_k(t_i)\psi_k(x_m)-\lambda\int_a^b k(x_m,y).\sum_{k=1}^{N}c_k(t_i)\psi_k(y)\,dy-\lambda\sum_{j=0}^{i-1}w_j F_{i,j}\sum_{k=1}^{N}c_k\left(t_j\right)\psi_k(x_m)\right]dx=\int_a^b\psi_j(x)f(x_m,t_i)\,dx \quad \textbf{(3.12)}$$

[9] [8]

4. لأمثلة

مثال (1.4) النظر في المعادلة التكاملية التالية:

$$\phi(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \tau^2 \phi(x,\tau)\, d\tau + \lambda \int_a^b e^{x+y} \phi(y,t)\, dy$$

حيث الحل التحليلي $\emptyset(x,t) = t^2 e^x$.

➢ **باستخدام طريقة التجميع**

في معادلة التكاملية (4.1) سنأخذ $N = 2,\ a = 0,\ b = 1,$

$$f(x,t) = \frac{3}{2} t^2 e^x - \frac{1}{5} e^x t^5 - \frac{1}{2} t^2 e^x e^2$$

دع الحل التقريبي له في شكل المعادلة (3.5)، فإن الدوال الثلاثة مستقلة هي $\psi_1(x) = 1,\ \psi_2(x) = x,\ \psi_3(x) = x^2$.

استبدال هذه القيم في المعادلة التكاملية (3.8)، ثم حل صيغ معادلات عندما يكون $x = 0, 0.5, 1.0,$ في هذه الحالة $R = 0$. نحصل علي:

$$c_1(t_0) = 0,\ c_2(t_0) = 0,\ c_3(t_0) = 0$$
$$c_1(t_1) = 0.0005130967957,\ c_2(t_1) = 0.000432839493,\ c_3(t_1) = 0.000415594769 \quad \textbf{(4.1)}$$
$$c_1(t_2) = 0.002104378751,\ c_2(t_2) = 0.001731361786,\ c_3(t_2) = 0.001662382707 \quad \textbf{(4.2)}$$

لذا فأن الحل بالنسبة $t \in [0,0.03]$ يأخذ الشكل (انظر جدول 1):

$$S(x,t_0) = 0$$
$$S(x,t_1) = 0.0005130967957 + 0.000432839493x - 0.000415594769x^2 \quad \textbf{(4.3)}$$
$$S(x,t_2) = 0.002104378751 + 0.001731361786x + 0.001662382707x^2$$

➢ **طريقة جالركين**

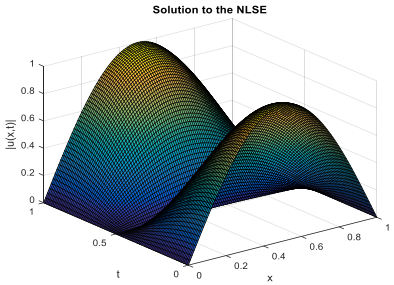
كما هو حال طريقة التجميع، باستخدام (3.9) في(3.12) اختار ثلاثة دوال مستقلة $\psi_1(x) = 1,\ \psi_2(x) = x,\ \psi_3(x) = x^2$ وثلاثة نقاط $x = 0, 0.5, 1.00,$ عندما نفترض $t \in [0,0.03]$ اذن لدينا:

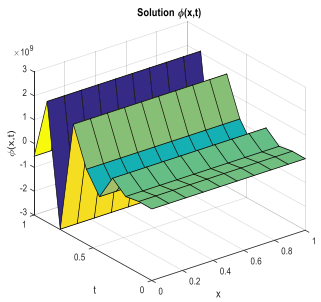
$$c_1(t_0) = 0,\ c_2(t_0) = 0,\ c_3(t_0) = 0$$
$$c_1(t_1) = 0.00051949274,\ c_2(t_1) = 0.00042025907,\ c_3(t_1) = 0.000414362907 \quad \textbf{(4.4)}$$
$$c_1(t_2) = 0.00212991168,\ c_2(t_2) = 0.0016810402,\ c_3(t_2) = 0.0016574556$$

جدول (1) قيم الخطأ E^C, E^G باستخدام طريقة التجميع وطريقة جالركين

x	$\phi(x,t)$	E^C	E^G
t=0			
0	0	0	0
0.5	0	0	0
1.00	0	0	0
t=0.015000000			
0	0.000225	0.0002880967957	0.0002944927 4
0.5	0.0003709622286 0	0.0004624529484	0.0004622507140
1.00	0.0006116134113	0.0007499176467	0.0007425012987
t=0.030000000			
0	0.0009	0.0012043787714	0.0012299117 0
0.5	0.0014838491 44	0.0019018061262	0.0019009466 56
1.00	0.0024464536 45	0.0030516695185	0.0030219539 55

$$S(x,t_0)=0$$
$$S(x,t_1)=0.00051949274+0.000414362907x+0.000415594769x^2 \quad \textbf{(4.5)}$$
$$S(x,t_2)=0.00212991168+0.0016810402x+0.0016574556x^2$$





مثال (2.4) النظر في المعادلة التكاملية التالية:

$$\phi(x,t)=f(x,t)+\lambda\int_0^t t\tau\phi(x,\tau)\,d\tau+\lambda\int_a^b e^{-y}\phi(y,t)\,dy$$

حيث الحل التحليلي $\emptyset(x,t)=te^{-x}$

- طريقة التجميع

في المعادلة التكاملية (4.6) سنأخذ $N=2,\ a=0,\ b=1,$ $f(x,t)=-0.00432t+e^{-x}t-0.333e^{-x}t^4$ دع الحل التقريبي في المعادلة التكاملية (3.5)، ثم أختر ثلاث دوال مستقلة $\psi_1(x)=1,\ \psi_2(x)=x,\ \psi_3(x)=x^2$.

أستبدل هذه القيم في المعادلة (3.8)، ثم حل صيغ المعادلات $x=0,0.5,1.00$ في هذه الحالة $R=0$ نحصل علي:

$$c_1(t_0)=0,\ c_2(t_0)=0,\ c_3(t_0)=0$$
$$c_1(t_1)=0.008541939634,\ c_2(t_1)=-0.01412633660,\ c_3(t_1)=0.004644538564 \quad \textbf{(4.7)}$$
$$c_1(t_2)=0.01708389624,\ c_2(t_2)=-0.02825268914,\ c_3(t_2)=0.009289082405$$

لذا فإن الحل بالنسبة ل $t\in[0,0.03]$ يأخذ الشكل:

$$S(x,t_0)=0$$
$$S(x,t_1)=0.008541939634-0.01412633660\,x-0.004644538564x^2 \quad \textbf{(4.8)}$$
$$S(x,t_2)=0.01708389624-0.02825268914x+0.009289082405x^2$$

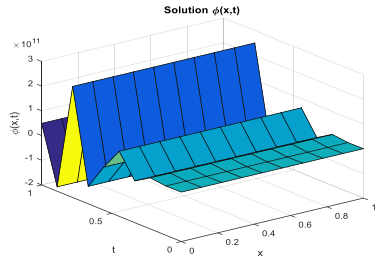
- **طريقة جالركين**

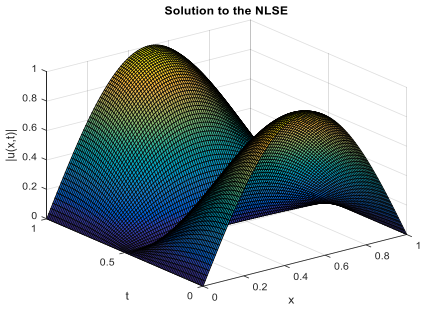
نختار ثلاث دوال مستقلة $\psi_1(x)=1,\ \psi_2(x)=x,\ \psi_3(x)=x^2$. وثلاثة نقاط $x=0,0.5,1.00$ عندما نفترض $t\in[0,0.03]$ لدينا:

$$c_1(t_0)=0,\ c_2(t_0)=0,\ c_3(t_0)=0$$
$$c_1(t_1)=0.008459192683,\ c_2(t_1)=-0.013958221152,\ c_3(t_1)=0.00463077286 \quad \textbf{(4.9)}$$
$$c_1(t_2)=0.01708389624,\ c_2(t_2)=-0.02825268914,\ c_3(t_2)=0.009289082405$$

وبذلك يكون الحل بالشكل (أنظر جدول 2)

$$S(x,t_0)=0$$
$$S(x,t_1)=0.008459192683-0.013958221152x+0.00463077286\ x^2 \quad \textbf{(4.10)}$$





$$S(x,t_2) = 0.01708389624 - 0.02825268914x + 0.009289082405x^2$$

جدول (2) قيم الخطأ E^C, E^G باستخدام طريقة التجميع وطريقة جالركين

x	$\phi(x,t)$	E^C	E^G
t=0			
0	0	0	0
0.5	0	0	0
1.00	0	0	0
t=0.015000000			
0	0.015	0.006445806036	0.006540807317
0.5	0.009009795989	0.006458053921	0.006401775 8
1.00	0.005518191618	0.006458050020	0.006386437595
t=0.030000000			
0	0.03	0.012916103 76	0.013081595 73
0.5	0.018195919 79	0.012916097 52	0.012920348 95
1.00	0.011036383 24	0.012916093 74	0.012770287 037

5. الخلاصة

تم في هذا البحث دراسة استقرارية حل معادلة فريدهولم-فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ذات النواة المتصلة، مع التركيز على الأنوية الشاذة وغير الشاذة. وتم استخدام طرق عددية مثل طريقة التجميع وطريقة جالركين لتحويل المعادلة التكاملية إلى نظام معادلات خطية يمكن حله عددياً. من خلال الأمثلة التطبيقية التي تم تناولها في البحث، أظهرت النتائج أن الطرق العددية المستخدمة قادرة على إعطاء حلول دقيقة ومستقرة للمعادلات التكاملية حتى في الحالات التي تتغير فيها النواة أو الدالة المعطاة مع الزمن أو الموقع. كما بينت الأمثلة أن الحلول العددية تتقارب بشكل جيد مع الحلول التحليلية (عند توفرها)، وأن نسبة الخطأ كانت منخفضة جداً، مما يدل على فعالية وكفاءة المنهجية المقترحة. تؤكد هذه النتائج أن الطرق العددية مثل طريقة جالركين والتجميع تعتبر أدوات قوية وموثوقة في حل المعادلات التكاملية ذات النواة المتصلة، خاصة في التطبيقات العلمية والهندسية التي تتطلب دقة واستقرارية عالية.

6. التوصيات

يوصى الباحثان بالآتي:

- تطبيق معادلة فريدهولم-فولتيرا التكاملية في التعلم الآلي.

- إجراء المزيد من الدراسات لتطوير تقنيات أكثر دقة واستقراراً لمواجهة تحديات المعادلات غير الخطية والمعقدة مستقبلاً.

7. الشكر والتقدير

نتقدم بخالص الشكر والامتنان لجميع الأفراد الذين دعموا وأسهموا في إتمام هذا البحث. كما نتوجه بالشكر الخاص إلى لجنة التقييم الموقرة على مراجعتهم الدقيقة وملاحظاتهم البناءة ورؤاهم القيمة التي ساهمت بشكل كبير في تحسين جودة هذا العمل.

8. المراجع

[1] M. A. Ghaith, **Some Numerical methods for Solving Fredholm and Volterra integral equations of the second kind. The Libyan Academy, 2017.**

[2] S. M. Zemyan, **The Classical Theory of Integral Equations**, Springer science + Business Media, LLC. 2012.

[3] S. Rahbar and E. Hashemizadeh, **A Computational Approach to the Fredholm Integral Equation of the Second Kind, Proceedings of the World Congress on Engineering,** VOI II, July 2-4, London, U.K., (2008).

[4] Hameed, H. Abbas and Z. Mohammad, **Taylor Series Method for Solving Linear Fredholm Integral Equation of Second Kind Using MATLAB, Journal of Babylon University, Pure and Applied sciences,** no. 1, vol. 19, (2011).

[5] K. Atkinson and W. Han, **Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework,** 2^{nd} edition, Springer-Verlag, New York, (2005).

[6] A. Sidi and M. Israeli, **Quadrature Methods for Periodic Singular and Weakly Singular Fredholm Integral Equations, Mathematics and Statistics** 2,201-231, (1988).

[7] C. Groh and M. Kelmanson, **Closed-Form Error Estimates for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the second Kind, Journal of Integral Equations and Applications**, PP. 181-192, 2009.

[8] F.A Hendi, A.M. Albugami, **Numerical solution for Fredholm–Volterra integral equation of the second kind by using collocation and Galerkin methods.** King Saud UniversityJournal of King Saud University (Science), 2010.

[9] Abdou, MA, Salama, FA, 2004. **The Volterra – Fredholm integral equation self the first kind of and spectral relationship ships**. J. Appl. Math. C